CLAMFIM Bologna

Modelli 1 @ Clamfim

Equazioni differenziali di Bernoulli e Riccati

27 settembre 2016

professor Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

Bernoulli equation

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x) \tag{B}$$

can also be solved solve using the same approach followed for linear equation imposing a solution of the form $y(x) = c(x)e^{A(x)}$ obtaining the separable equation for $c(x)$

$$c'(x) = b(x)e^{(\alpha-1)A(x)}c^{\alpha}(x)$$

so that $c(x) = \left[(1-\alpha)F(x) + c_0^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$

where $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(z)e^{(\alpha-1)A(z)}\,\mathrm{d}z$

Riccati equation

$$\boldsymbol{y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2} \tag{R}$$

Riccati equation

$$\boldsymbol{y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2} \tag{R}$$

Suppose that $y_1(x)$ solves (R).

Riccati equation

$$\boldsymbol{y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2} \tag{R}$$

Suppose that $y_1(x)$ solves (R). Then assuming that the other solutions of (R) have the form $y(x) = y_1(x) + u(x)$ being $u(x)$ an unknown function to be determinated, then $u(x)$ solves the associated Bernoulli equation

$$u' = (b(x) + 2c(x)y_1(x))u + c(x)u^2$$

Otherwise substitution

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

drives (R) into the linear equation

$$u' = -c(x) - (b(x) + 2c(x)y_1(x))u$$

Example Knowing that $y_1(x) = 1$ solves the Riccati equation

$$y' = -\frac{1+x}{x} + y + \frac{1}{x}y^2 \tag{r}$$

show that the general solution to equation (r) is

$$y(x) = 1 + \frac{x^2 e^x}{c + (1-x)e^x}$$

Example Knowing that $y_1(x) = 1$ solves the Riccati equation

$$y' = -\frac{1+x}{x} + y + \frac{1}{x}y^2 \tag{r}$$

show that the general solution to equation (r) is

$$y(x) = 1 + \frac{x^2 e^x}{c + (1-x)e^x}$$

We use the change of variable $y(x) = 1 + \dfrac{1}{u(x)}$ to obtain the linear equation

$$u' = -\frac{1}{x} - \left(1 + \frac{2}{x}\right) u$$

$$A(x) = -\int \left(1 + \frac{2}{x}\right)\, \mathrm{d}x = -x - 2\ln x \implies e^{A(x)} = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$A(x) = -\int \left(1 + \frac{2}{x}\right)\,\mathrm{d}x = -x - 2\ln x \implies e^{A(x)} = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$\int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}x^2e^x\,\mathrm{d}x = -\int xe^x\,\mathrm{d}x = (1-x)e^x$$

$$A(x) = -\int \left(1 + \frac{2}{x}\right)\,\mathrm{d}x = -x - 2\ln x \implies e^{A(x)} = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$\int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}x^2e^x\,\mathrm{d}x = -\int xe^x\,\mathrm{d}x = (1-x)e^x$$

$$u(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}(c + (1-x)e^x) = \frac{ce^{-x} + 1 - x}{x^2} = \frac{c + (1-x)e^x}{x^2e^x}$$

$$A(x) = -\int \left(1 + \frac{2}{x}\right)\, \mathrm{d}x = -x - 2\ln x \implies e^{A(x)} = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$\int b(x) e^{-A(x)}\, \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x} x^2 e^x\, \mathrm{d}x = -\int x e^x\, \mathrm{d}x = (1-x)e^x$$

$$u(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}(c + (1-x)e^x) = \frac{ce^{-x} + 1 - x}{x^2} = \frac{c + (1-x)e^x}{x^2 e^x}$$

Conclusion $y = 1 + \dfrac{1}{u} = 1 + \dfrac{x^2 e^x}{c + (1-x)e^x}$

Example

Using the fact that $y_1(x) = x$ solves

$$y' = -x^5 + \frac{y}{x} + x^3 y^2 \tag{E}$$

find the general solution of (E)

Example

Using the fact that $y_1(x) = x$ solves

$$y' = -x^5 + \frac{y}{x} + x^3 y^2 \tag{E}$$

find the general solution of (E)

Putting $y = x + u$ we get

$$1 + u' = -x^5 + \frac{x+u}{x} + x^3 (x+u)^2$$

Example

Using the fact that $y_1(x) = x$ solves

$$y' = -x^5 + \frac{y}{x} + x^3 y^2 \tag{E}$$

find the general solution of (E)

Putting $y = x + u$ we get

$$1 + u' = -x^5 + \frac{x+u}{x} + x^3 (x+u)^2$$

Simplifying we get the Bernoulli equation

$$u' = \frac{2x^5 + 1}{x} u + x^3 u^2$$

which can be solved with the change of variable $v = u^{-1}$

which gives

$$-\frac{v'}{v^2} = \frac{2x^5 + 1}{xv} + \frac{x^3}{v^2}$$

which gives

$$-\frac{v'}{v^2} = \frac{2x^5+1}{xv} + \frac{x^3}{v^2}$$

Multiplying by $-v^2$ we get the linear differential equation

$$v' = -\frac{2x^5+1}{x}v - x^3$$

whose solution is

$$v(x) = \frac{ce^{-\frac{2x^5}{5}}}{x} - \frac{1}{2x}$$

being c an integration constant.

which gives

$$-\frac{v'}{v^2} = \frac{2x^5+1}{xv} + \frac{x^3}{v^2}$$

Multiplying by $-v^2$ we get the linear differential equation

$$v' = -\frac{2x^5+1}{x}v - x^3$$

whose solution is

$$v(x) = \frac{ce^{-\frac{2x^5}{5}}}{x} - \frac{1}{2x}$$

being c an integration constant.

Therefore the general solution of the given Riccati equation is

$$\boldsymbol{y = \frac{2x}{2ce^{-\frac{2x^5}{5}} - 1} + x}$$

Exercise Knowing that $y_1(x) = 1$ is a solution of

$$y'(x) = -1 - e^x + e^x y(x) + y^2(x) \tag{$\star$}$$

show that the general solution to $(\star)$ is

$$y(x) = 1 + \frac{e^{2x+e^x}}{c - e^{e^x}(e^x - 1)}$$

Hint: $\displaystyle\int e^{2x+e^x}\,\mathrm{d}x = e^{e^x}(e^x - 1)$

Forma ridotta dell'equazione di Riccati

$$u' = A(x) + B(x)u^2$$

Forma ridotta dell'equazione di Riccati

$$\boldsymbol{u' = A(x) + B(x)u^2}$$

Data una equazione di Riccati in forma generale

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 \tag{R}$$

in cui si suppone che a, b, $c \neq 0$, se $B(x)$ è una primitiva di $b(x)$ e cioè $B'(x) = b(x)$ il cambio di variabili $u(x) = e^{-B(x)}y$ trasforma (R) nell'equazione di Riccati ridotta:

$$\boldsymbol{u' = a(x)e^{-B(x)} + c(x)e^{B(x)}u^2}$$

Esempio

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{2x}\, y + xy^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{2x}\, y + xy^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$B(x) = \int -\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln x$$

Esempio

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{2x}\, y + xy^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$B(x) = \int -\frac{1}{2x}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \ln x$$

$$y = e^{B(x)} u = \exp\left(-\frac{1}{2} \ln x\right) u$$

Esempio

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{2x}\, y + xy^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$B(x) = \int -\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln x$$

$$y = e^{B(x)}u = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln x\right) u = x^{-\frac{1}{2}}u$$

Esempio

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{2x}\, y + xy^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$B(x) = \int -\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln x$$

$$y = e^{B(x)}u = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln x\right) u = x^{-\frac{1}{2}}u$$

$$\begin{cases} u' = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + u^2\right) \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{2x} y + xy^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$B(x) = \int -\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln x$$

$$y = e^{B(x)}u = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln x\right)u = x^{-\frac{1}{2}}u$$

$$\begin{cases} u' = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + u^2\right) \\ u(1) = 0 \end{cases} \implies u(x) = \tan\left(\frac{1}{3}\left(2x^{3/2} - 2\right)\right)$$

Una applicazione macroeconomica

Robert Solow "A contribution to the Theory of Economic Growth",
Quarterly Journal of Economics, Vol. LXX, February 1956

Produzione del bene Q funzione del capitale K e del lavoro L

$$\boldsymbol{Q = F\left(K, L\right)}$$

Una applicazione macroeconomica

Robert Solow "A contribution to the Theory of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics, Vol. LXX, February 1956

Produzione del bene Q funzione del capitale K e del lavoro L

$$\boldsymbol{Q = F\,(K, L)}$$

F omogenea di grado uno per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $K, L \in \mathbb{R}$

Una applicazione macroeconomica

Robert Solow "A contribution to the Theory of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics, Vol. LXX, February 1956

Produzione del bene Q funzione del capitale K e del lavoro L

$$\boldsymbol{Q = F\,(K, L)}$$

F omogenea di grado uno per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $K, L \in \mathbb{R}$

$$F\,(\alpha K, \alpha L) = \alpha\, F\,(K, L)$$

Una applicazione macroeconomica

Robert Solow "A contribution to the Theory of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics, Vol. LXX, February 1956

Produzione del bene Q funzione del capitale K e del lavoro L

$$\boldsymbol{Q = F\,(K, L)}$$

F omogenea di grado uno per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $K, L \in \mathbb{R}$

$$F\,(\alpha K, \alpha L) = \alpha\, F\,(K, L)$$

la funzione di produzione F dipende dal rapporto capitale/lavoro detto **intensità di capitale**

$$f(x) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(x, 1)$$

allora:

$$f(x) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(x, 1)$$

allora:

$$Q = F(K, L) = Lf(x) \tag{a}$$

$$f(x) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(x, 1)$$

allora:

$$Q = F(K, L) = Lf(x) \tag{a}$$

Q, K, L variabili nel tempo, $Q = Q(t)$, $L = L(t)$, $K = K(t)$.

$$f(x) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(x, 1)$$

allora:

$$Q = F(K, L) = Lf(x) \tag{a}$$

Q, K, L variabili nel tempo, $Q = Q(t)$, $L = L(t)$, $K = K(t)$.

Supponiamo la variazione del capitale direttamente proporzionale alla produzione

$$f(x) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(x, 1)$$

allora:

$$Q = F(K, L) = L f(x) \tag{a}$$

Q, K, L variabili nel tempo, $Q = Q(t)$, $L = L(t)$, $K = K(t)$.

Supponiamo la variazione del capitale direttamente proporzionale alla produzione

$$K'(t) = s\, Q(t) \tag{b}$$

$$f(x) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(x, 1)$$

allora:

$$Q = F(K, L) = Lf(x) \tag{a}$$

Q, K, L variabili nel tempo, $Q = Q(t)$, $L = L(t)$, $K = K(t)$.

Supponiamo la variazione del capitale direttamente proporzionale alla produzione

$$K'(t) = s\,Q(t) \quad \text{con } s > 0 \tag{b}$$

$$f(x) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(x, 1)$$

allora:

$$Q = F(K, L) = L f(x) \tag{a}$$

Q, K, L variabili nel tempo, $Q = Q(t)$, $L = L(t)$, $K = K(t)$.

Supponiamo la variazione del capitale direttamente proporzionale alla produzione

$$K'(t) = s\,Q(t) \quad \text{con } s > 0 \tag{b}$$

La forza lavoro varia nel tempo secondo la:

$$f(x) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(x, 1)$$

allora:

$$Q = F(K, L) = Lf(x) \tag{a}$$

Q, K, L variabili nel tempo, $Q = Q(t)$, $L = L(t)$, $K = K(t)$.

Supponiamo la variazione del capitale direttamente proporzionale alla produzione

$$K'(t) = s\,Q(t) \quad \text{con } s > 0 \tag{b}$$

La forza lavoro varia nel tempo secondo la:

$$L'(t) = \lambda L(t) \tag{W}$$

$$f(x) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(x, 1)$$

allora:

$$Q = F(K, L) = Lf(x) \tag{a}$$

Q, K, L variabili nel tempo, $Q = Q(t)$, $L = L(t)$, $K = K(t)$.

Supponiamo la variazione del capitale direttamente proporzionale alla produzione

$$K'(t) = s\,Q(t) \quad \text{con } s > 0 \tag{b}$$

La forza lavoro varia nel tempo secondo la:

$$L'(t) = \lambda L(t) \tag{W}$$

λ è positivo: esprime la *natalità* della forza lavoro

Derivando la formula dell'intensità di capitale $K(t) = L(t)\,x(t)$

Derivando la formula dell'intensità di capitale $K(t) = L(t)\,x(t)$

$$K'(t) = L'(t)(t)\,x(t) + L(t)\,x'(t)$$

Derivando la formula dell'intensità di capitale $K(t) = L(t)\,x(t)$

$$K'(t) = L'(t)(t)\,x(t) + L(t)\,x'(t)$$

ricordando (W), troviamo:

Derivando la formula dell'intensità di capitale $K(t) = L(t)\,x(t)$

$$K'(t) = L'(t)(t)(t)\,x(t) + L(t)\,x'(t)$$

ricordando (W), troviamo:

$$K'(t) = [\lambda x(t) + x'(t)]\; L(t) \tag{K}$$

Derivando la formula dell'intensità di capitale $K(t) = L(t)\,x(t)$

$$K'(t) = L'(t)(t)\,x(t) + L(t)\,x'(t)$$

ricordando (W), troviamo:

$$K'(t) = [\lambda x(t) + x'(t)]\;L(t) \tag{K}$$

D'altra parte, per (a) e per (b) possiamo riscrivere il lato sinistro di (K):

Derivando la formula dell'intensità di capitale $K(t) = L(t)\,x(t)$

$$K'(t) = L'(t)(t)\,x(t) + L(t)\,x'(t)$$

ricordando (W), troviamo:

$$K'(t) = [\lambda x(t) + x'(t)]\;L(t) \tag{K}$$

D'altra parte, per (a) e per (b) possiamo riscrivere il lato sinistro di (K):

$$s\,L(t)f(x) = [\lambda x(t) + x'(t)]\,L(t)$$

Derivando la formula dell'intensità di capitale $K(t) = L(t)\,x(t)$

$$K'(t) = L'(t)(t)\,x(t) + L(t)\,x'(t)$$

ricordando (W), troviamo:

$$K'(t) = [\lambda x(t) + x'(t)]\; L(t) \tag{K}$$

D'altra parte, per (a) e per (b) possiamo riscrivere il lato sinistro di (K):

$$s\,L(t)f(x) = [\lambda x(t) + x'(t)]\,L(t)$$

dopo aver liberato da $L(t)$ i due lati dell'ultima uguaglianza, otteniamo:

$$\boldsymbol{x'(t) = -\lambda x(t) + s f(x(t))}$$

$$\boldsymbol{x'(t) = -\lambda x(t) + s f(x(t))}$$

Se la produzione è Cobb-Douglas $F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ si ha $f(x) = x^{\alpha}$, e si ottiene una equazione di Bernoulli:

$$\boldsymbol{x'(t) = -\lambda x(t) + s f(x(t))}$$

Se la produzione è Cobb-Douglas $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ si ha $f(x) = x^\alpha$, e si ottiene una equazione di Bernoulli:

$$\boldsymbol{x'(t) = -\lambda x(t) + s\, x^\alpha(t)}$$

$$\boldsymbol{x'(t) = -\lambda x(t) + s f(x(t))}$$

Se la produzione è Cobb-Douglas $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ si ha $f(x) = x^\alpha$, e si ottiene una equazione di Bernoulli:

$$\boldsymbol{x'(t) = -\lambda x(t) + s\, x^\alpha(t)}$$

Applicando la trasformazione $v(t) = x^{1-\alpha}(t)$

$$\boldsymbol{x'(t) = -\lambda x(t) + s f(x(t))}$$

Se la produzione è Cobb-Douglas $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ si ha $f(x) = x^\alpha$, e si ottiene una equazione di Bernoulli:

$$\boldsymbol{x'(t) = -\lambda x(t) + s\, x^\alpha(t)}$$

Applicando la trasformazione $v(t) = x^{1-\alpha}(t)$

$$\begin{cases} v'(t) = -\lambda(1-\alpha)v(t) + s(1-\alpha) \\ v(0) = x_0^{1-\alpha} \end{cases}$$

da cui

$$v(t) = \frac{\left(\lambda x_0^{1-\alpha} - s\right) e^{-\lambda(1-\alpha)t} + s}{\lambda}$$

da cui

$$v(t) = \frac{\left(\lambda x_0^{1-\alpha} - s\right) e^{-\lambda(1-\alpha)t} + s}{\lambda}$$

tornando alla variabile $x(t)$ intensità di capitale (capitale/lavoro)

da cui

$$v(t) = \frac{\left(\lambda x_0^{1-\alpha} - s\right) e^{-\lambda(1-\alpha)t} + s}{\lambda}$$

tornando alla variabile $x(t)$ intensità di capitale (capitale/lavoro)

$$\boldsymbol{x(t) = \left[\frac{\left(\lambda x_0^{1-\alpha} - s\right) e^{-\lambda(1-\alpha)t} + s}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

da cui

$$v(t) = \frac{\left(\lambda x_0^{1-\alpha} - s\right) e^{-\lambda(1-\alpha)t} + s}{\lambda}$$

tornando alla variabile $x(t)$ intensità di capitale (capitale/lavoro)

$$\boldsymbol{x(t) = \left[\frac{\left(\lambda x_0^{1-\alpha} - s\right) e^{-\lambda(1-\alpha)t} + s}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

gli economisti politici trovano importante il fatto che

da cui

$$v(t) = \frac{\left(\lambda x_0^{1-\alpha} - s\right) e^{-\lambda(1-\alpha)t} + s}{\lambda}$$

tornando alla variabile $x(t)$ intensità di capitale (capitale/lavoro)

$$\boldsymbol{x(t) = \left[\frac{\left(\lambda x_0^{1-\alpha} - s\right) e^{-\lambda(1-\alpha)t} + s}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

gli economisti politici trovano importante il fatto che

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{K(t)}{L(t)} = \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

in tal caso gli economisti parlano **inspiegabilmente** di **convergenza** del modello, senza tener conto che l'irrealistica ipotesi malthusiana sulla popolazione porta che

in tal caso gli economisti parlano **inspiegabilmente** di **convergenza** del modello, senza tener conto che l'irrealistica ipotesi malthusiana sulla popolazione porta che

$$L(t) = L_0 \, e^{\lambda \, t}$$

in tal caso gli economisti parlano **inspiegabilmente** di **convergenza** del modello, senza tener conto che l'irrealistica ipotesi malthusiana sulla popolazione porta che

$$L(t) = L_0 \, e^{\lambda t}$$

quindi la *convergenza* di $x(t)$ comporta che anche il capitale deve crescere esponenzialmente

T. W, Swan it Economic Growth and Capital Accumulation Economic Record, **32**, (1956) 334-361 introdusse nel modello il deprezzamento del capitale arrivando con procedimento analogo all'equazione differenziale

T. W, Swan it Economic Growth and Capital Accumulation Economic Record, **32**, (1956) 334-361 introdusse nel modello il deprezzamento del capitale arrivando con procedimento analogo all'equazione differenziale

$$x'(t) = -(\lambda + \delta)\, x(t) + s\, x^{\alpha}(t)$$

T. W, Swan it Economic Growth and Capital Accumulation Economic Record, **32**, (1956) 334-361 introdusse nel modello il deprezzamento del capitale arrivando con procedimento analogo all'equazione differenziale

$$x'(t) = -(\lambda + \delta)\, x(t) + s\, x^{\alpha}(t)$$

ottenuta sostituendo la relazione

T. W, Swan it Economic Growth and Capital Accumulation Economic Record, **32**, (1956) 334-361 introdusse nel modello il deprezzamento del capitale arrivando con procedimento analogo all'equazione differenziale

$$x'(t) = -(\lambda + \delta)\, x(t) + s\, x^{\alpha}(t)$$

ottenuta sostituendo la relazione

$$K'(t) = s\, Q(t)$$

T. W, Swan it Economic Growth and Capital Accumulation Economic Record, **32**, (1956) 334-361 introdusse nel modello il deprezzamento del capitale arrivando con procedimento analogo all'equazione differenziale

$$x'(t) = -\,(\lambda + \delta)\,x(t) + s\,x^{\alpha}(t)$$

ottenuta sostituendo la relazione

$$K'(t) = s\,Q(t)$$

con la più realistica

T. W, Swan it Economic Growth and Capital Accumulation Economic Record, **32**, (1956) 334-361 introdusse nel modello il deprezzamento del capitale arrivando con procedimento analogo all'equazione differenziale

$$x'(t) = -\,(\lambda + \delta)\,x(t) + s\,x^{\alpha}(t)$$

ottenuta sostituendo la relazione

$$K'(t) = s\,Q(t)$$

con la più realistica

$$K'(t) = s\,Q(t) - \delta\,K(t)$$